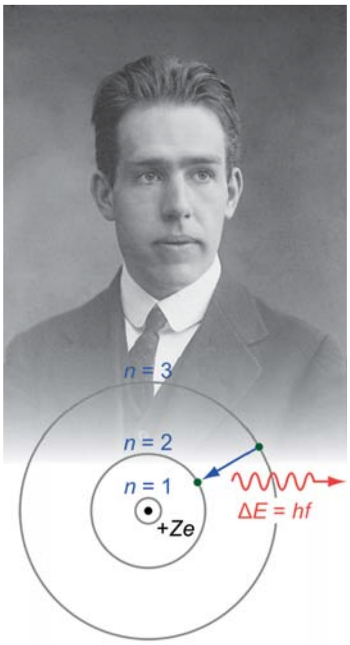
FYSIKERNES HEMMELIGE VÅBEN

Fysikernes form for bogstavregning gør det muligt at udlede nye formler ved dimensionsanalyse. Dette hemmelige våben kan andre fagområder også have glæde af, da det kan give en dybere forståelse af sammenhænge, der ellers blot er erfaringsbaserede.

Det er indlysende, at ligningen 18 får = 18 mursten er noget vrøvl, selvom der står 18 på begge sider af lighedstegnet. På samme måde er 18 sek = 18 m noget vrøvl. I gymnasiet skal man derfor i fysiktimerne lave enhedskontrol af sine udregninger. Hvis en udregning ikke ender med samme *slags* enheder på begge sider af lighedstegnet, er der begået en fejl, som man bør finde og rette. Den ene side af lighedstegnet må for eksempel ikke have enheden m/sek, medens den anden side af ligningen har enheden m/sek^2. Det afgørende ved enhedskontrol er, at enhederne på hver sin side af lighedstegnet repræsenterer samme slags fysiske størrelse, for eksempel den fysiske størrelse hastighed. Eller sagt på en anden måde: De to sider af ligningen skal have samme dimension, for eksempel dimensionen hastighed (som er en længde divideret med en tid). Når fysikere laver dimensionsanalyse udnytter de konsekvenser af dette krav – ikke blot til enhedskontrol, men også til teoretisk at udlede nye formler ud fra kendte formler og nye antagelser.

Da Niels Bohr i 1913 udviklede den model for brintatomet, som skulle



blive startskuddet til kvantemekanikken og forståelsen af elektronernes opførsel i atomerne, lod han sig således lede af dimensionsanalyse. Og der er mange spørgsmål indenfor fysikken, man kan tænke sig til svaret på ved hjælp af dimensionsanalyse – uden at udføre et eneste eksperiment. For eksempel, hvor lang tid det tager et timeglas på Månen at tømmes.

Det er imidlertid ikke kun fysikere, der har glæde af dimensionsanalyse. Også specialiserede ingeniører, for eksempel dem, der laver hydrodynamiske og aerodynamiske modelforsøg, bruger dimensionsanalyse som et vigtigt værktøj. Men slagkraften af dimensionsanalyse er skjult for mange, der kunne have udbytte af tankegangen - også uden for fysik og specialiserede ingeniørfag. Artiklen her er ment som en introduktion til dimensionsanalyse og tænkningen bag.

Symboler i fysik og matematik

I matematik og fysik udtrykker vi os ved hjælp af symboler. Talsymboler, eksempelvis 18, når vi regner med tal (aritmetik). Bogstaver som pladsholdere for tal, når vi regner med bogstaver i matematik (algebra). I fysik regner vi, som i matematik, også med bogstaver. Her er bogstaverne imidlertid pladsholdere for fysiske størrelser, ikke for tal. Kort fortalt er dimensionsanalyse relevant, når vi regner med formler, hvor bogstaverne i formlerne repræsenterer fysiske størrelser, ikke tal som i matematikken.

For at tydeliggøre tænkningen bag dimensionsanalyse vil vi groft skitsere de tre abstraktionsspring ved brugen af symboler i matematik og fysik gennem menneskehedens historie:

Om forfatterne

Jens Højgaard Jensen er lektor i fysik på Roskilde Universitet. Forfatter af klumme om fysikopgaver i Kvant (Tidsskrift for Fysik og Astronomi)
jhj@ruc.dk

Tina Hecksher er lektor i fysik på Roskilde Universitet. Hun er tilknyttet forskningsprojektet Matter, der er støttet af Villum Fonden.
tihe@ruc.dk

Pythagoras' sætning

Et af de enkleste eksempler på dimensionsanalyse er det nedenstående bevis for Pythagoras' sætning. Udover at være enkelt, er eksemplet også dialogåbnende i forhold til umiddelbart dimensionsanalyse-skeptiske matematikere. I online-versionen af artiklen findes flere, mere komplicerede, men også mere repræsentative eksempler.

De fleste kender formlen $c^2 = a^2+b^2$, som udtrykker forholdet mellem sidelængderne i en retvinklet trekant. Det er en meget berømt geometrisk sætning, som der findes hundredvis af mere eller mindre komplicerede beviser for (se fx. www.cut-the-knot.org/pythagoras/ som indeholder en samling på 120 af slagsen). Her vil vi skitsere et dimensionsargument for sætningen.

En retvinklet trekant er entydigt bestemt ud fra længden af hypotenusen, c, og den mindste vinkel, θ. Arealet A af trekanten er således også en entydigt bestemt funktion af disse to størrelser.

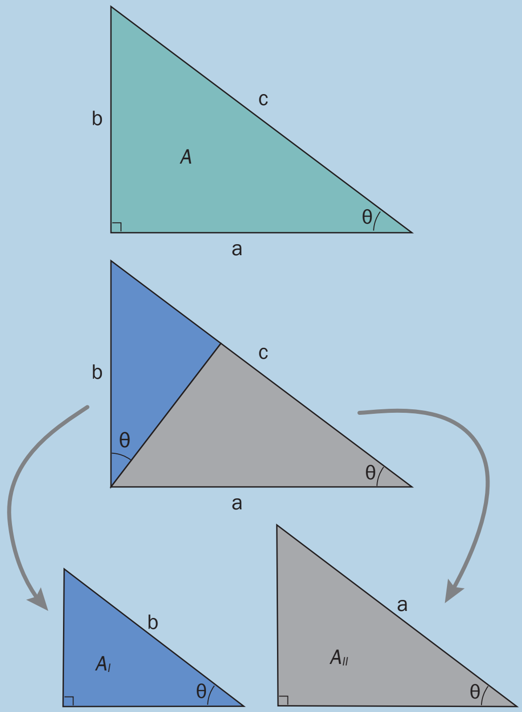
På figuren er den retvinklede trekant opdelt i to retvinklede trekanter med henholdsvis arealerne A_I og A_{II}. Det ses af figuren, at de to trekanter har samme form som den store trekant, begge med vinklen θ som deres mindste vinkel, men med hypotenuserne b og a.

Arealet af den oprindelige trekant opfylder:

$$A = A_I + A_{II}$$

Nu vil vi bruge dimensionsanalyse til at gå et skridt videre i beviset.

Da vinklen θ er dimensionsløs (den har ikke en fysisk enhed), og arealet af trekanten skal have dimensionen areal (længde gange længde), må A af dimensionsgrunde være tvunget til at have formen $c^2 \cdot f(\theta)$, hvor f er en entydig funktion alene af θ. Vi vil ikke på andre måder



kunne få dimensionen areal ud af størrelserne c og θ. Tilsvarende gælder $A_{II} = a^2 \cdot f(\theta)$ og $A_I = b^2 \cdot f(\theta)$.

Læg mærke til, at vi ikke behøver kende det eksakte udtryk for $f(\theta)$. Vi har kun brug for, at $f(\theta)$ er entydigt bestemt. (I dette tilfælde kan vi dog beregne $f(\theta) = 1/2 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta)$.)

Sætter vi udtrykkene ind i $A = A_I + A_{II}$ får vi:

$$c^2 \cdot f(\theta) = a^2 \cdot f(\theta) + b^2 \cdot f(\theta)$$

Ved division med $f(\theta)$ på begge sider af lighedstegnet fås

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

altså Pythagoras' sætning.

Ved at tælle har man i forhistorisk tid kunnet nå frem til, at mine otte får plus dine fem får tilsammen udgør en flok på tretten får. Ligeledes har man kunnet finde ud af, at hvis vi bunker mine otte mursten med dine fem mursten, så har vi tretten mursten i bunken. Abstraktionsspringet består da i, at otte plus fem er tretten, uanset om det drejer sig om får, mursten eller alt muligt andet. Med vor tids skrivemåde gælder udsagnet: 8 + 5 = 13, generelt for tal. At der er tale om en abstraktion ses af, at det er noget, der kræver undervisning i de små klassetrin i skolen. Når man i dag snakker om at tælle på fingrene har det altså ikke så meget med fingre at gøre, som det har med en abstrakt tænkemåde at gøre.

Det andet abstraktionsspring består i at erstatte tal med bogstaver. Abstraktionsgraden øges selvfølgelig, når vi lader bogstaver være pladsholdere for tal. Lad os som illustration se på udtrykket (a+b)(a-b). Ved at benytte regnereglerne for tal for a og b kan parenteserne ganges ud til $a^2 - ab + ba - b^2$. Da ab = ba fås derfor $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$ som en alment gældende formel. Da vi har udført de samme operationer med a og b, som vi kunne gøre med for eksempel tallene 17 og 3½, eller alle mulige andre par af tal, ses den enorme økonomiske gevinst ved abstraktionsspringet fra at regne med tal (aritmetik) til at regne med bogstaver (algebra): Ved at regne med bogstaver kan vi på en gang finde formler som gælder for alle talsituationer. Fantastisk!

Det tredje abstraktionsspring er, når bogstaverne i formelregning forstås, ikke som pladsholdere for tal, men som pladsholdere for fysiske størrelser. Hvis vi siger, at Lise og Anna vejer lige meget, eller at Jan vejer dobbelt så meget som de to hver for sig, er det udsagn om fysiske størrelser, ikke om tal. Vi behøver ikke tal for at bekræfte udsagnene. Det første udsagn kan bekræftes ved at Lise og Anna sætter sig i hver sin ende af en vippe. Det andet ved at Lise og Anna sammen sidder i den ene ende af vippen og Jan i

Dimensionsanalyse – sådan gør man!

Arbejdet med denne artikel har været vanskeligt: Hvordan skrive en artikel om udledning af formler uden illustrerende brug af formler? I det væsentlige har vi undgået formlerne, da erfaringen er, at mange, også blandt læserne af dette blad, går uden om formler. Til læsere, som har fået lyst til at vide mere om, hvordan man faktisk gør, har vi udarbejdet fem eksempler på dimensionsanalyse, som du kan finde på AktuelNaturvidenskab.dk og i en udvidet onlineversion af artiklen.

I dette ekstramateriale har vi udfoldet de to eksempler nævnt i artiklen om at finde svingningstiden og omløbstiden for henholdsvis et pendul og en satellit, og hvorfor permeabiliteten nødvendigvis må afhænge af kvadratet på størrelsen af partiklerne, når vand strømmer gennem materialer (Darcys lov).

Desuden har vi et eksempel fra biologiens verden om, hvor hurtigt fugle basker med vingerne i stillestående luft samt to yderligere fysikeksempler om størrelsen på et atom, og hvor hurtigt sand løber gennem et timeglas på månen.

den anden. Ligningerne $m_L = m_A$ og $m_L + m_A = m_J$ for masserne af Lise, Anna og Jan giver mening, uden at vi skal en omvej omkring enheder og tal. I fysikken har det gennem de seneste par hundrede år gradvist stået klarere, at bogstavregningen i teoretisk fysik repræsenterer regning med fysiske størrelser fremfor med tal. Massen af Lise er ikke et tal. Den kan udtrykkes ved et tal gange en enhed, for eksempel 50 kg. Men den kan også beskrives som 50.000 g. Eller som 110,23 lb. Uanset hvilke enheder med dertil hørende tal, vi benytter, er det størrelsen massen af Lise, der er tale om. Og i teoretisk fysik behøver vi ikke vælge enheder for at foretage beregninger. Det er først, når vi sammenligner med målinger, at vi har behov for enheder og dertil hørende tal.

Størrelser og dimensioner i fysik

I geometri kan vi sige, at for eksempel hypotenusen i en retvinklet trekant har dimensionen længde. Man skriver [c] = L, som skal læses som "dimensionen af c er længde". Med længde som enkeltstående basisstørrelsesart gælder så $[c^2] = L^2$, idet c^2 er af den af basisstørrelsesarten længde afledte størrelsesart areal. Da størrelsesarten vinkel er afledt som forholdet imellem to længder, kan vi for en vinkel, φ, skrive [φ] = 1, hvor 1-tallet markerer, at størrelsesarten vinkel regnes dimensionsløs. Alt sammen meget formelt og umiddelbart værdiløst, hvis ikke det kunne fungere som en overgang til, hvordan der arbejdes med basisstørrelsesarter, afledte størrelsesarter og dertil svarende dimensioner i fysik.

Det internationalt vedtagne SI-system, som lærebøgerne i fysik nu om dage skrives i overensstemmelse med, er opbygget af to omgange. Først er det fastlagt, hvilke basisstørrelsesarter systemet skal bygges på. Nemlig størrelsesarterne længde, masse, tid, elektrisk strømstyrke, temperatur, lysstyrke og stofmængde. Derefter er der besluttet enheder for basisstørrelsesarterne, nemlig meter, kilogram, sekund, ampere, kelvin, candela og mol. Herudfra kan der defineres afledte størrelsesarter med hertil hørende dimensioner og afledte enheder. For eksempel er størrelsesarten hastighed afledt af basisstørrelsesarterne længde og tid med dimensionen L/T og enheden m/sek, idet dimensionen af størrelsesarten tid kaldes T. Kort fortalt har SI-systemet haft en dobbelt betydning for fysik. I forhold til eksperimentalfysik leverer det måleenheder. I forhold til teoretisk fysik styrer det, i kraft af valget af basisstørrelsesarter, måden formler skrives på, og måden størrelsesregning i fysik foregår på.

Teoretisk forskning ved hjælp af dimensionsanalyse

Når bogstavregning i fysik forstås som regning med fysiske størrelser med forskellige dimensioner, er det ikke så svært at forstå, hvad dimensionsanalyse bygger på. Det giver kun mening at addere, subtrahere eller sætte fysiske størrelser lig med hinanden, hvis de har samme dimension. Derimod giver det mening at gange og dividere fysiske størrelser med hinanden til nye slags størrelser. For eksempel kan hastigheden 1 m/sek opnås ved at dividere 18 meter med 18 sekunder. Ved bogstavregning med fysiske størrelser ganger og dividerer vi med bogstaverne som pladsholdere for pakker af tal gange enheder. Men vi kan kun addere og subtrahere bogstaver, der repræsenterer størrelser med samme dimension. Og vi kan kun sætte bogstavudtryk lig hinanden, hvis størrelserne på hver side af lighedstegnet har samme dimension. Det er kernen i dimensionsanalyse.

Ved anvendelse af Newtons mekanik kan svingningstiden for penduler udregnes til at være givet ved formlen $\tau = 2\pi\sqrt{l/g}$, hvor τ er pendulets svingningstid, og l og g er henholdsvis pendulets længde og tyngdefeltstyrken på Jorden. Ved en anden slags anvendelse af Newtons mekanik kan omløbstiden for satellitter nær Jordens overflade udregnes til at være givet ved formlen $\tau = 2\pi\sqrt{R/g}$, hvor τ nu er omløbstiden for satellitter, og R og g henholdsvis er Jordens radius og tyngdefeltstyrken på Jorden.

De to formler, kan også udledes ved dimensionsanalyse – bortset fra faktoren 2π i formlerne. Ifølge formlerne afhænger hverken pendulsvingningstider eller satellit-omløbstider af henholdsvis pendulernes eller satellitternes masser. Det er umiddelbart til at forstå ud fra dimensionsanalyse. Vi kan nemlig ikke få dimensionerne til at passe, hvis vi i en formel for τ lader en masse indgå på højre side af formlen. Dimensionsanalysen forklarer også, hvorfor formlerne er ens bortset fra ombytningen af pendullængden og Jordens radius, selvom måderne de traditionelt udledes på afviger fra hinanden.

Et værktøj ikke kun for fysikere

Også uden for fysik kan man teoretisk tænke sig til formler ved hjælp af dimensionsanalyse. I hydrogeologi bruger man udtrykket permeabilitet til at beskrive vands bevægelse igennem materialer i undergrunden (for eksempel sand eller grus). Ifølge lærebogslitteraturen i hydrogeologi er det en måleerfaring, at permeabiliteten er proportional med kvadratet på størrelsen af partiklerne i materialet. Dimensionsanalyse viser imidlertid, at det, med de gjorte antagelser i hydrogeologi, ikke kan være anderledes. Når måleresultatet viser, at permeabiliteten afhænger af kvadratet på størrelsen af partiklerne, er det derfor ikke så interessant, som hvis det viste en afvigelse herfra. For så ville det nemlig rette søgelyset imod primære antagelser i hydrogeologien. Man kan også teoretisk tænke sig til resultater i biologi ved hjælp af dimensionsanalyse. Hvor hurtigt basker en stillestående lærke med vingerne, sammenlignet med hvor hurtigt en stillestående høg basker med sine vinger?

Dimensionsanalyse er altså ikke forbeholdt fysik – alle fag, der tænker i fysiske størrelser, kan have glæde af det. Permeabiliteten i hydrogeologi og vingebaskefrekvensen for stillestående fugle er lige såvel fysiske størrelser (med reference til SI-systemet), som de fysiske størrelser, vi udregner formler for i fysik.

Men opfattelsen af formler er afgørende for at udføre dimensionsanalyse både i fysik og andre fag.

Den mest udbredte opfattelse af formler er, at de er en form for stenografisk fremstilling af måleresultater. Og opfattet således, giver det ikke mening at nå frem til formlerne ved hjælp af dimensionsanalyse. Vi må da nøjes med enhedskontrol.

Dimensionsanalyse hænger sammen med en teoretisk tilgang til udledningen af formler: Givet de og de formler i forvejen sammenholdt med de og de antagelser til lejligheden, hvad fører det til? Det er i en sådan situation, at dimensionsanalysen kan være teoretisk vejledende.

At dimensionsanalysen er et hemmeligt våben for fysikere frem for udøvere af andre fag, hænger nærliggende sammen med tyngden af formaliseret teori i fysik. Ikke desto mindre er dimensionsanalysen overset som tænkemåde, ikke alene i andre fag, men også blandt mange fysikere . ■

Videre læsning:
Jan de Boer, Symboler og betegnelser i matematikken og fysikken, Fysisk Tidskrift 86 (1988) 49

Einstein gjorde noget tilsvarende vores bevis her for Pythagoras sætning som 11-årig, se S. Strogatz, Einsteins first proof, The New Yorker (19 november 2015).

For yderligere inspiration fra vores hånd se J.H. Jensen, Atlanterhavsbølger, KVANT December 2015, 29, J. H. Jensen, Bohrs atommodel, KVANT Maj 2016, 33 og T. Hecksher, Insights through dimensions, Nature Physics, 13 (2017), 1026.

En mere omfattende introduktion på dansk til dimensionsanalyse kan findes ved at google IMFUFA tekster og gå til tekst nr. 269, en studenterprojektrapport fra RUC skrevet af Tine Guldager Christiansen, Ken Andersen, Nikolaj Hermann og Jannik Rasmussen i 1994.